

2018

## MATHEMATICS

( General )

( Calculus : Methods and Applications )

Full Marks : 80

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks  
for the questions

Answer either in English or in Assamese

1. Answer the following questions : 1×10=10

তলত দিয়া প্রশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) What is the  $n$ th derivative of  $x^m$ ?

$x^m$ ৰ  $n$ তম অৱকলজ কি ?

(b) Write down the Maclaurin's expansion of  $\cos x$ .

$\cos x$ ৰ মেৰু'বিনৰ বিস্তৃতিটো লিখা।

(c) "Every differentiable function of two variables is continuous." Is it true?

"দুটা চলক বিশিষ্ট সকলো অৱকলনীয় ফলন অবিচ্ছিন্ন হয়।" সচানে ?

(d) Define an asymptote for a curve.

এটা বক্রৰ অনন্তস্পৰ্শকৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(e) Find the value of  $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x dx$ .

$\int_0^{\pi/2} \cos^3 x dx$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(f) Find the integrating factor of  $xdy - ydx$ .

$xdy - ydx$ ৰ অনুকল উৎপাদকটো নিৰ্ণয় কৰা।

(g) Define the order and degree of a differential equation.

এটা অৱকল সমীকৰণৰ ক্ৰম আৰু ঘাতৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(h) Write down the reduction formula for  $\int \tan^n x dx$ .

$\int \tan^n x dx$ ৰ লঘুকৰণ সূত্ৰটো লিখা।

(i) State the Euler's theorem on homogeneous function for two variables.

দুটা চলক বিশিষ্ট সমসত্ত্ব ফলনৰ অয়েলাৰ উপপাদ্যটো লিখা।

- (j) Give an example of a linear differential equation of order 3.

3 ক্ৰমৰ এটা বৈখিক অৱকল সমীকৰণৰ উদাহৰণ দিয়া।

2. Answer the following questions : 2×5=10

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

- (a) Find the  $n$ th derivative of  $y = \frac{1}{ax+b}$ .

$y = \frac{1}{ax+b}$  ৰ  $n$ তম অৱকলজ নিৰ্ণয় কৰা।

- (b) State the Cauchy's mean value theorem.

কোচিৰ মধ্যমানৰ উপপাদ্যটো লিখা।

- (c) Find all the asymptotes of the curve  $4x - xy - 3y = 0$ , parallel to the axes.

বক্ৰ  $4x - xy - 3y = 0$  ৰ অক্ষৰ সমান্তৰাল সকলোবোৰ অনন্তস্পৰ্শক নিৰ্ণয় কৰা।

- (d) Find the degree and order of the differential equation :

অৱকল সমীকৰণটোৰ ঘাত আৰু ক্ৰম নিৰ্ণয় কৰা :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2-y^2}}$$

(e) Solve :

সমাধান কৰা :

$$(D^4 + 2D^2 + 1)y = 0$$

3. Answer any four questions of the following :

5×4=20

তলৰ যি কোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা :

(a) State and prove Leibniz's theorem.

লিৰনিজৰ উপপাদ্যটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা।

(b) If  $u = \tan^{-1} \frac{x^3 + y^3}{x - y}$ ,  $x \neq y$ , then show that

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$$

যদি  $u = \tan^{-1} \frac{x^3 + y^3}{x - y}$ ,  $x \neq y$ , তেন্তে দেখুওৱা যে

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$$

(c) If  $\rho$  be the radius of curvature of the curve  $y = f(x)$ , then prove that

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

যদি  $y = f(x)$  বক্রের বক্রতা ব্যাসার্ধ  $\rho$  হয়, তেজ্জে প্রমাণ  
করা যে

$$\rho = \frac{\left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

(d) If  $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$ , then prove that

$$I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$$

and deduce the value of  $I_5$ .

যদি  $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$ , তেজ্জে প্রমাণ করা যে

$$I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$$

আৰু ইয়াৰ পৰা  $I_5$ ৰ মান উলিওৱা।

(e) Find the length of the astroid

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

এষ্টৰইড  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ৰ দৈৰ্ঘ্য নিৰ্ণয় কৰা।

- (f) Form the differential equation for the curve  $y = ax + bx^2$ , where  $a$  and  $b$  are arbitrary constants.

বক্র  $y = ax + bx^2$  ব বাবে অৱকল সমীকৰণটো গঠন কৰা, য'ত  $a$  আৰু  $b$  স্বেচ্ছ প্ৰৱৰ্তক।

4. Answer any four questions of the following :

10×4=40

তলৰ যি কোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা :

- (a) (i) Show that the differential equation

$$(y^4 + 4x^3y + 3x) dx +$$

$$(x^4 + 4xy^3 + y + 1) dy = 0$$

is exact and hence solve it.

$$(y^4 + 4x^3y + 3x) dx +$$

$$(x^4 + 4xy^3 + y + 1) dy = 0$$

অৱকল সমীকৰণটো যথার্থ বুলি দেখুৱাই সমাধান কৰা।

- (ii) Solve :

সমাধান কৰা :

$$x \frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \log x$$

Or / অথবা

Solve :

সমাধান কৰা :

$$\frac{dy}{dx} - 2y \cos x = -2 \sin 2x$$

(b) Solve any two of the following :

তলৰ যি কোনো দুটা সমাধান কৰা :

(i)  $(D^2 + 4D + 3)y = e^{-3x}$

(ii)  $(D^2 - 1)y = x^2 \cos x$

(iii)  $(D^3 + D^2 + D + 1)y = \sin 2x$

(iv)  $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + y = 3x^2$

(c) State and prove the Rolle's theorem. By using Rolle's theorem, verify for the function  $f(x) = x^2$  in the interval  $[-1, 1]$ .

ব'লৰ উপপাদ্যটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা। ব'লৰ উপপাদ্যটো ব্যৱহাৰ কৰি  $[-1, 1]$  অন্তৰালত  $f(x) = x^2$  ফলনটো প্ৰতিপন্ন কৰা।

- (d) (i) Find the equations of tangent and normal at any point  $(x, y)$  of the curve

$$\frac{x^m}{a^m} + \frac{y^m}{b^m} = 1$$

$(x, y)$  বিন্দুত  $\frac{x^m}{a^m} + \frac{y^m}{b^m} = 1$  বক্রের স্পর্শক আৰু অভিলম্বৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

- (ii) If  $u = x^2 \tan^{-1} \frac{y}{x} - y^2 \tan^{-1} \frac{x}{y}$ ,  $xy \neq 0$ , then prove that

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

যদি  $u = x^2 \tan^{-1} \frac{y}{x} - y^2 \tan^{-1} \frac{x}{y}$ ,  $xy \neq 0$ ,

তেন্তে প্রমাণ কৰা যে

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

- (e) (i) Examine the continuity of the function  $f$  defined by

$$f(x) = 2^{1/x}, \quad x \neq 0$$

$$= 0, \quad x = 0$$

$f$  ফলনটোৰ অবিচ্ছিন্নতা পৰীক্ষা কৰা, য'ত

$$f(x) = 2^{1/x}, \quad x \neq 0$$

$$= 0, \quad x = 0$$



- (ii) Prove that the radius of curvature at the vertex of the parabola  $y^2 = 4x$  is  $\frac{1}{2}$ .

$y^2 = 4x$  পৰাবৃত্তৰ শীৰ্ষবিন্দুত বক্রতা ব্যাসার্ধ  $\frac{1}{2}$  বুলি প্রমাণ কৰা।

- (f) (i) If  $y = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$ , then prove by using Leibniz's theorem that

$$(1 + x^2)y_{n+2} + (2n + 1)xy_{n+1} + n^2y_n = 0$$

যদি  $y = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$ , তেন্তে লিৰনিজৰ উপপাদ্যৰ ব্যৱহাৰ কৰি প্রমাণ কৰা যে

$$(1 + x^2)y_{n+2} + (2n + 1)xy_{n+1} + n^2y_n = 0$$

- (ii) Evaluate :

মান উলিওৱা :

$$\int_0^{\pi/4} \sec^3 x \, dx$$

- (g) (i) Prove that

$$\int_0^{2a} f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx,$$

$$\text{if } f(2a - x) = f(x)$$

and

$$\int_0^{2a} f(x) \, dx = 0, \text{ if } f(2a - x) = -f(x)$$

প্রমাণ করা যে

$$\int_0^{2a} f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx,$$

যদি  $f(2a-x) = f(x)$

আর

$$\int_0^{2a} f(x) dx = 0, \text{ যদি } f(2a-x) = -f(x)$$

- (ii) Find the asymptotes parallel to coordinate axis of the curve  $(x^2 + y^2)x - ay^2 = 0$ .

$(x^2 + y^2)x - ay^2 = 0$  বক্রের অক্ষের সমান্তরাল হোরা অনন্তস্পর্শক নির্ণয় করা।

- (h) (i) Find the area bounded by the parabola  $y^2 = 4ax$  and its latus rectum.

$y^2 = 4ax$  পর্বাবৃত্ত আর ইয়ার নিয়ামিকাই আগুৱা অংশৰ কালি নির্ণয় করা।

- (ii) Solve :

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3 \frac{dx}{dt} + 2x = 0$$

Given that when  $t=0$ , then  $x=0$

and  $\frac{dx}{dt} = 2$ .

সমাধান করা :

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0$$

য'ত দিয়া আছে, যেতিয়া  $t=0$  তেতিয়া  $x=0$

আব  $\frac{dx}{dt} = 2$  হয়।

\*\*\*

