

2018

MATHEMATICS

(General)

(Coordinate Geometry and Vector Analysis)

Full Marks : 80

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

Answer either in English or in Assamese

1. Answer the following questions : 1×10=10

তলত দিয়া প্রশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

(a) For what value of a , $ax^2 + 8xy + 8y^2 = 0$ represents a pair of coincident straight lines?

a ৰ কি মানৰ বাবে $ax^2 + 8xy + 8y^2 = 0$ সমীকৰণে এযোৰ একবেৰীয় সবলবেখা নিকপণ কৰিব ?

(b) Write the equation of the tangent to the circle $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ at the point (x', y') on the circle.

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তৰ ওপৰত থকা
(x' , y') বিন্দুত টনা স্পৰ্শকৰ সমীকৰণটো লিখা।

(c) Find the eccentricity of the ellipse
 $x^2 + 3y^2 = a^2$.

$x^2 + 3y^2 = a^2$ উপবৃত্তৰ উৎকেন্দ্ৰতা নিৰ্ণয় কৰা।

(d) Define conjugate diameters of an ellipse.

উপবৃত্ত এটাৰ সংযুক্ত ব্যাসৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(e) Define asymptote to a curve.

এটা বক্ৰৰ অনন্তস্পৰ্শী ৰেখাৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(f) Write the symmetrical form of equation
of a straight line [d.c. l , m , n].

সৰলৰেখাৰ সমমিত আকাৰৰ সমীকৰণটো লিখা [দিশাংক
 l , m , n]।

(g) Write the equation of the plane passing
through origin.

মূলবিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা সমতলৰ সমীকৰণ লিখা।

(h) Write down the value of $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$.

$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ ৰ মান কিমান?

(i) If $\vec{v} = xy\hat{i} + yz\hat{j} + zx\hat{k}$, then find $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$.

যদি $\vec{v} = xy\hat{i} + yz\hat{j} + zx\hat{k}$, তেন্তে $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ ৰ মান উলিওৱা।

(j) $(\text{grad } \phi) \times \vec{A} + \phi \text{ curl } \vec{A} = ?$

2. Answer the following questions : 2×5=10

নিম্নোক্ত প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Find the equation of the bisectors of the angles between the pair of lines given by $3x^2 + 6xy - y^2 = 0$.

$3x^2 + 6xy - y^2 = 0$ ৰেখাদ্বয়ৰ মধ্যবৰ্তী কোণৰ সমদ্বিখণ্ডক দুডালৰ যৌথ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

(b) Find the equation of the parabola whose focus is the point $(-1, 1)$ and directrix is the line $x + y + 1 = 0$.

$(-1, 1)$ নাভিবিन्दু আৰু $x + y + 1 = 0$ ৰেখা নিয়ামিকা হোৱা অধিবৃত্তৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

(c) Show that the difference between the focal distances of any point on a hyperbola is constant and equal to the transverse axis.

দেখুউৱা যে নাভিছয়ৰ পৰা পৰাবৃত্তৰ যি কোনো এটা বিন্দুৰ দূৰত্ব প্ৰভেদ হয় আৰু ইয়াৰ মান বৃহদাক্ষৰ সমান।

- (d) Find the equation of the directrix of the conic $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$.

$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ শাংকৰৰ নিয়ামিকাৰ সমীকৰণ
উলিওৱা।

- (e) If $\vec{a} = (2, 1, -3)$, $\vec{b} = (1, 4, -2)$ and $\vec{c} = (3, -1, 5)$, then find $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c}$.

যদি $\vec{a} = (2, 1, -3)$, $\vec{b} = (1, 4, -2)$ আৰু
 $\vec{c} = (3, -1, 5)$, তেন্তে $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c}$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

3. Answer any four questions of the following :

5×4=20

তলৰ যি কোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা :

- (a) For what value of k , the equation $2x^2 + 2kxy - 6y^2 + 3x + y + 1 = 0$ represents a pair of lines? 5

k ৰ কি মানৰ বাবে

$$2x^2 + 2kxy - 6y^2 + 3x + y + 1 = 0$$

সমীকৰণে এযোৰ সবলৰেখা নিকপণ কৰে ?

- (b) Show that the equation of the chord of contact of tangents from (x_1, y_1) to the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ is $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$. 5

দেখুওৱা যে (x_1, y_1) বিন্দুৰ পৰা $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

উপবৃত্তলৈ টনা স্পৰ্শকবোৰৰ ছেদবিন্দুত টনা জ্যাৰ সমীকৰণ $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$.

- (c) Find the condition that the line $lx + my + n = 0$ is a tangent to the conic $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$. 5

$lx + my + n = 0$ সৰলৰেখাজল,

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

শাংকৰৰ স্পৰ্শক হোৱাৰ চৰ্ত উলিওৱা।

- (d) Find the equation of the plane through the line $x + y + z + 3 = 0 = 2x - y + 3z + 1$ and parallel to the line $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$. 5

$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ বেখাৰ সমান্তৰাল আৰু

$x + y + z + 3 = 0 = 2x - y + 3z + 1$ বেখাৰ

মাজেৰে যোৱা সমতলৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

- (e) Find the equation of the cone with vertex at origin and passing through the curve $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = z$.

5

যদি এটা শঙ্কুর শীৰ্ষবিন্দুটো মূলবিন্দুত থাকে, আৰু শঙ্কুটো $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = z$ বক্ৰটোৰ মাজেৰে যায়, তেনেহ'লে শঙ্কুটোৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

- (f) If $\vec{r} = \vec{a} \cos \omega t + \vec{b} \sin \omega t$, then show that $\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \omega(\vec{a} \times \vec{b})$ and $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\omega^2\vec{r}$.

5

যদি $\vec{r} = \vec{a} \cos \omega t + \vec{b} \sin \omega t$, তেন্তে দেখুওৱা যে $\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \omega(\vec{a} \times \vec{b})$ আৰু $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\omega^2\vec{r}$.

Answer either (a) or (b) of each of the following questions :

10×4=40

তলৰ প্ৰতিটো প্ৰশ্নৰ পৰা (a) অথবা (b)ৰ উত্তৰ কৰা :

4. (a) (i) If by a rotation of the rectangular axes about the origin, the expression $ax^2 + 2hxy + by^2$ changes to $a'x'^2 + 2h'x'y' + b'y'^2$, then prove that $a+b = a'+b'$ and $ab - h^2 = a'b' - h'^2$.

5

অক্ষদ্বয়ক মূলবিন্দু সাপেক্ষে নির্দিষ্ট দিশত
ঘুৰালে যদি $ax^2 + 2hxy + by^2$ বাশিটো,
 $a'x'^2 + 2h'x'y' + b'y'^2$ লৈ পৰিবৰ্তন হয়,
তেন্তে প্রমাণ কৰা যে $a+b = a'+b'$ আৰু
 $ab - h^2 = a'b' - h'^2$.

- (ii) Find the condition that the circles
 $x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ and
 $x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$ may
intersect orthogonally. 5

$x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ আৰু
 $x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$ বৃত্ত
দুটাই লম্বভাৱে ছেদ কৰাৰ চৰ্তটো উলিওৱা।

- (b) (i) Find the condition that the
equation

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

represents a pair of parallel straight
lines. 5

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

সমীকৰণে এযোৰ সমান্তৰাল সৰলৰেখা নিকাৰণ
কৰাৰ চৰ্ত নিৰ্ণয় কৰা।

- (ii) Find the pole of the line $lx + my + n = 0$ with respect to the parabola $y^2 = 4ax$.

5

$y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তৰ সাপেক্ষে
 $lx + my + n = 0$ ৰেখাৰ ফ্ৰাৰ বিন্দু নিকাৰণ
 কৰা।

5. (a) (i) Show that the difference of the focal distances of a point on the hyperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ is always a constant.

5

দেখুওৱা যে $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পৰাবৃত্তটোৰ ওপৰত
 থকা যি কোনো এটা বিন্দুৰ নাভিদূৰত্বৰ অন্তৰফল
 সদায় এটা ধ্ৰুৱক।

- (ii) Reduce the equation

$$3x^2 - 6xy - 5y^2 - 6x + 22y - 17 = 0$$

to standard form.

5

তলৰ সমীকৰণটোক আদৰ্শগত আকাৰত ৰূপান্তৰিত
 কৰা :

$$3x^2 - 6xy - 5y^2 - 6x + 22y - 17 = 0$$

- (b) (i) Find the equation of the plane which contains the line $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{4}$ and is perpendicular to the plane $x+2y+z=12$. 5

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{4} \text{ সবলবেশ্যক ধারণ কৰা}$$

আৰু $x+2y+z=12$ সমতলৰ লম্বভাৱে থকা সমতলৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

- (ii) Find the shortest distance and equation of shortest distance between the lines

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{-3} \text{ and } \frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{2} \quad 5$$

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{-3} \text{ আৰু } \frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{2}$$

সবলবেশ্যাদুডালৰ মাজৰ হ্রস্বতম দূৰত্ব আৰু হ্রস্বতম দূৰত্বৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

6. (a) (i) Find the equation of the sphere passing through the circle $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $x+2y-z+2=0$ and the point (1, 1, 1). 5

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25, \quad x + 2y - z + 2 = 0$$

বৃত্ত আৰু $(1, 1, 1)$ বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা গোলকৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

- (ii) Find the equation of the cylinder whose generators are parallel to $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$ and whose guiding curve is the ellipse $x^2 + 2y^2 = 1, z = 3$. 5

এটা চিলিণ্ডাৰৰ উৎপাদক ৰেখাকেইডাল যদি $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$ ৰেখাৰ সমান্তৰাল হয় আৰু ইয়াৰ পৰিচালক বক্ৰ যদি $x^2 + 2y^2 = 1, z = 3$ উপবৃত্ত হয়, তেন্তে চিলিণ্ডাৰটোৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

- (b) (i) Find in symmetrical form, the equation of a line $x + y + z + 1 = 0, 4x + y - 2z + 2 = 0$ and find its direction cosines. 5

$$x + y + z + 1 = 0, \quad 4x + y - 2z + 2 = 0$$

সৰলৰেখাক সমমিত আকাৰৰ সৰলৰেখাত প্ৰকাশ কৰা আৰু ইয়াৰ দিশাংক নিৰ্ণয় কৰা।

- (ii) A plane passes through a fixed point (p, q, r) and cuts the axes in A, B, C . Show that the locus of the centre of the sphere $OABC$ is
- $$\frac{p}{x} + \frac{q}{y} + \frac{r}{z} = 2. \quad 5$$

এটা নির্দিষ্ট বিন্দু (p, q, r) ব মাঝেবে যোৰা সমতলে অক্ষকেইডালক ক্ৰমে A, B, C ত কাটে। দেখুওৰা যে $OABC$ গোলকৰ কেন্দ্ৰৰ সম্ভাৱপথ $\frac{p}{x} + \frac{q}{y} + \frac{r}{z} = 2$.

7. (a) (i) If $\phi(x, y, z) = xy^2z$ and $\vec{A} = xy\hat{i} - xy^2\hat{j} + yz^2\hat{k}$, find $\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial z} (\phi \vec{A})$ at the point $(2, -1, 1)$. 5

যদি $\phi(x, y, z) = xy^2z$ আৰু $\vec{A} = xy\hat{i} - xy^2\hat{j} + yz^2\hat{k}$ হয়, তেন্তে $(2, -1, 1)$ বিন্দুত $\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial z} (\phi \vec{A})$ ৰ মান উলিওৰা।

- (ii) Prove that
প্রমাণ কৰা যে

$$(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot (\vec{a} \times \vec{d}) + (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{d}) + (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = 0 \quad 5$$

(b) (i) Show that

দেখুওনা যে

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \vec{a} \cdot \vec{d} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{vmatrix}$$

5

(ii) Prove that

প্রমাণ কবা যে

$$\text{curl grad } \phi = \vec{0}$$

5
