2017

MATHEMATICS

(General)

(Abstract Algebra and Matrices)

Full Marks : 60

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

Answer either *in English* or *in Assamese*

PART—I

(*Marks* : 7)

1. Answer the following questions : 1×7=7

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) What is the order of an element of a group?

সংঘৰ উপাদান এটাৰ মাত্ৰা মানে কি ?

(b) Give an example of a skew-symmetric matrix.

বিষম-সমমিত মৌলকক্ষৰ এটা উদাহৰণ দিয়া।

(c) What are zero divisors of a ring?

বলয়ৰ শূন্য ভাজকৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(d) Define field with an example.

এটা উদাহৰণৰ সৈতে ক্ষেত্ৰৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(e) Find the inverse of the following matrix :
তলৰ মৌলকক্ষৰ প্ৰতিলোম উলিওৱা :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \ \theta \in \mathbb{R}$$

(f) Fill in the blank :
শূন্যস্থান পূৰণ কৰা :

$$A \cdot (\text{adj}A) = _____ = (\text{adj}\,A)\,A$$

Where A is a square matrix.
য'ত A এটা বৰ্গীয় মৌলকক্ষ।

(g) What is the identity element of the following group?
তলৰ সংঘটোৰ একক মৌল কি?

$$\frac{G}{N} = \{Nx : x \in G\}$$

PART—II

(*Marks* : 8)

2. Answer the following questions : 2×4=8
তলৰ প্ৰশ্নকেইটাৰ উত্তৰ লিখা :

(a) Find the rank of the following matrix :
তলৰ মৌলকক্ষৰ কোটি উলিওৱা :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{m \times n}$$

(b) Let $f : \langle \mathbb{Z}, + \rangle \to \langle \mathbb{R}^*, 0 \rangle$ be given by $f(m) = 2^m$, for every $m \in \mathbb{Z}$. Show that f is a homomorphism.

এটা ফলন $f : \langle \mathbb{Z}, + \rangle \to \langle \mathbb{R}^*, 0 \rangle$ তলত দিয়া ধৰণে সংজ্ঞাবদ্ধ :

$$f(m) = 2^m \ \forall\, m \in \mathbb{Z}$$

দেখুওৱা যে f এটা সমৰূপতা হয়।

(c) Find $f \circ g$, where f, g are permutations on $S = \{1, 2, 3\}$ given by

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

f আৰু g, $S = \{1, 2, 3\}$ সংহতিৰ উপৰত দুটা বিন্যাস। $f \circ g$ উলিওৱা, যদি

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(d) For what value of k, does the following matrix fail to be invertible?

kৰ কি মানৰ বাবে তলৰ মৌলকক্ষটো প্ৰতিলোমনীয় হ'ব নোৱাৰে?

$$\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{k}+1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

PART—III

(*Marks* : 15)

3. Answer any *three* questions from the following : 5×3=15

তলত দিয়াবোৰৰ যি কোনো তিনিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Define normal subgroup of a group. Show that intersection of two normal subgroups is again a normal subgroup.

সংঘৰ নিশ্চৰ উপসংঘৰ সংজ্ঞা দিয়া। দেখুওৱা যে দুটা নিশ্চৰ উপসংঘৰ ছেদনও এটা নিশ্চৰ উপসংঘ হ'ব।

(b) State and prove Lagrange's theorem.

লাগ্ৰাঞ্জৰ উপপাদ্যটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা।

(c) Find the rank of the following matrix by reducing it to echelon form :

Echelon আকাৰত প্ৰকাশ কৰি তলৰ মৌলকক্ষৰ কোটি উলিওৱা :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

(d) Define ring and give an example. Show that cancellation laws hold in an integral domain.

বলয়ৰ সংজ্ঞা আৰু এটা উদাহৰণ দিয়া। দেখুওৱা যে পূৰ্ণাংকীয় বাষ্ট্ৰত কটাকটি প্ৰক্ৰিয়া প্ৰযোজ্য হয়।

(e) If A is an n-square matrix, then show that

$$|\text{adj}\, A| = |A|^{n-1}$$

A এটা n-বৰ্গীয় মৌলকক্ষ। প্ৰমাণ কৰা যে

$$|\text{adj}\, A| = |A|^{n-1}$$

PART—IV

(*Marks* : 30)

Answer *either (a)* and *(b) or (c)* and *(d)* from each of the following questions : 10×3=30

তলত দিয়া প্ৰশ্নসমূহৰ পৰা *(a)* আৰু *(b) অথবা (c)* আৰু *(d)*ৰ উত্তৰ লিখা :

4. *(a)* Let $G = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ and it is defined $a * b = a + b + ab$, for every $a, b \in G$. Show that $\langle G, * \rangle$ is an abelian group.

$G = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ত এটা প্ৰক্ৰিয়া $*$ এনেদৰে দিয়া আছে :

$$a * b = a + b + ab$$

প্ৰতিটো $a, b \in G$. দেখুওৱা যে $\langle G, * \rangle$ এটা এবেলীয় সংঘ হয়।

(b) Define a normal subgroup of a group. Show that a subgroup H of a group G is normal if and only if $ghg^{-1} \in H$, for every $g \in G$, $h \in H$.

সংঘৰ নিশ্চৰ উপসংঘৰ সংজ্ঞা দিয়া। প্ৰমাণ কৰা যে G সংঘৰ উপসংঘ H এটা নিশ্চৰ উপসংঘ হ'ব, যদি আৰু যদিহে $ghg^{-1} \in H$, $g \in G$, $h \in H$ হয়।

(c) Let G be a group and $a \in G$. It is defined $f_a : G \to G$ s.t. $f_a(x) = axa^{-1}$, for every $x \in G$. Show that f_a is an automorphism of G.

G এটা সংঘ আৰু $a \in G$. $f_a : G \to G$ক তলত দিয়া দৰে সংজ্ঞাবদ্ধ কৰা হৈছে :

$$f_a(x) = axa^{-1},\ x \in G$$

দেখুওৱা যে f_a, Gৰ এটা automorphism হয়।

(d) Prove that every quotient group of a cyclic group is cyclic.

দেখুওৱা যে প্ৰতিটো চক্ৰীয় সংঘৰ ভাগফল সংঘও চক্ৰীয় হ'ব।

5. *(a)* Let

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$$

Show that M forms a ring with respect to the addition and multiplication of matrices. Also show that M is not an integral domain.

ধৰা

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$$

দেখুওৱা যে মৌলকক্ষৰ যোগ আৰু পূৰণ প্ৰক্ৰিয়া সাপেক্ষে M-এ এটা বলয় গঠন কৰে। আৰু দেখুওৱা যে M এটা পূৰ্ণাংকীয় ৰাষ্ট্ৰ নহয়।

(b) Show that a finite integral domain is a field.

দেখুওৱা যে এটা সসীম পূৰ্ণাংকীয় ৰাষ্ট্ৰ এটা ক্ষেত্ৰ হয়।

(c) In a ring R, show the following :

R বলয়ত তলত দিয়াবোৰ প্ৰমাণ কৰা :

(i) $(-a)(-b) = ab$

(ii) $a \cdot (b - c) = ab - ac;\ a, b, c \in R$

(d) Define Boolean ring. If R is a Boolean ring, then show that—

(i) $2x = 0$, for every $x \in R$;

(ii) R is commutative.

বুলীয়ান বলয়ৰ সংজ্ঞা দিয়া। R এটা বুলীয়ান বলয় হ'লে, দেখুওৱা যে—

(i) $2x = 0,\ x \in R$;

(ii) R ক্ৰমবিনিমেয় হয়।

6. *(a)* If A is an n-square matrix, then show that

$$A \cdot (\operatorname{adj} A) = \operatorname{diag}(|A|, |A|, \ldots, |A|)$$

এটা n-বৰ্গীয় মৌলকক্ষ Aত দেখুওৱা যে,

$$A \cdot (\operatorname{adj} A) = \operatorname{diag}(|A|, |A|, \ldots, |A|)$$

(b) Show that an n-square matrix A is invertible if and only if A is non-singular.

দেখুওৱা যে, n-বৰ্গীয় মৌলকক্ষ A প্ৰতিলোমনীয় হ'ব, যদি আৰু যদিহে A non-singular হয়।

(c) Solve the following system of equations by matrix method :

তলৰ সমীকৰণ প্ৰণালীটো মৌলকক্ষৰ প্ৰক্ৰিয়াৰে সমাধান কৰা :

$$x+y+z=1$$
$$3x+4y+5z=2$$
$$2x+3y+4z=1$$

(d) If $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, then show that $A^2=A^{-1}$.

যদি $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ হয়, তেনেহ'লে দেখুওৱা যে $A^2=A^{-1}$.

★★★