2019

MATHEMATICS

(General)

(Classical Algebra and Trigonometry)

Full Marks : 60

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

1. Answer the following as directed : 1×7=7

তলত দিয়াসমূহৰ নিৰ্দেশ অনুসৰি উত্তৰ দিয়া :

(a) If $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$,
$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$,

then write $\arg z_1 z_2$ and $\arg \frac{z_1}{z_2}$.

যদি $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$,

$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

তেন্তে $\arg z_1 z_2$ আৰু $\arg \frac{z_1}{z_2}$ কি হ'ব লিখা।

(b) Write $(-1+i)$ in polar form.

$(-1+i)$ ক ধ্ৰুৱীয় আকাৰত লিখা।

(c) Write the expansion of θ in powers of $\tan\theta$ stating necessary condition.

প্ৰয়োজনীয় চৰ্ত উল্লেখ কৰি $\tan\theta$ ৰ ঘাত সাপেক্ষে θ ৰ প্ৰসাৰণ লিখা।

(d) If α, β are roots of the equation $px^2 + qx + r = 0$, then find the value of

$$\Sigma\frac{1}{\alpha}$$

α, β যদি $px^2 + qx + r = 0$ সমীকৰণৰ মূল হয়, তেন্তে

$$\Sigma\frac{1}{\alpha} \text{ ৰ}$$

মান নিৰ্ণয় কৰা।

(e) Write the sum and product of the roots of the equation

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$$

$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$ সমীকৰণটোৰ মূলকেইটাৰ যোগফল আৰু পূৰণফল লিখা।

(f) Find the limit of the sequence

$$\left\{\frac{2n+1}{n+1}\right\}$$

তলৰ অনুক্ৰমটোৰ সীমা উলিওৱা :

$$\left\{\frac{2n+1}{n+1}\right\}$$

(g) Is the following series convergent?

তলত দিয়া শ্ৰেণীটো অভিসাৰী হয়নে?

$$3 - 3 + 3 - 3 + 3 \cdots$$

2. Answer the following questions : 2×4=8

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Find $\text{mod}\, z$ and $\arg z$:

$\text{mod}\, z$ আৰু $\arg z$ উলিওৱা :

$$z = -i$$

(b) If a and b are two positive real numbers and $a \neq b$, then prove that

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) > 4$$

যদি a আৰু b দুটা ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা আৰু $a \neq b$ হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) > 4$$

(c) If the sum of two roots of the equation

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

is 0, then prove that $pq - r = 0$.

যদি $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ সমীকৰণটোৰ দুটা মূলৰ যোগফল শূন্য হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $pq - r = 0$.

(d) Test the convergence of the following series :

তলৰ শ্ৰেণীটোৰ অভিসাৰিতাৰ পৰীক্ষা কৰা :

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots$$

3. Answer any *three* of the following questions : 5×3=15

তলত দিয়া প্ৰশ্নবিলাকৰ যি কোনো তিনিটাৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) If

$$x+\frac{1}{x}=2\cos\theta$$

then prove that

$$x^n+\frac{1}{x^n}=2\cos n\theta$$

যদি $x+\frac{1}{x}=2\cos\theta$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা

$$x^n+\frac{1}{x^n}=2\cos n\theta$$

(b) If (যদি)

$$x=\frac{2}{\lfloor 1}-\frac{4}{\lfloor 3}+\frac{6}{\lfloor 5}-\cdots\infty$$

and (আৰু)

$$y=1+\frac{2}{\lfloor 1}-\frac{2^3}{\lfloor 3}+\frac{2^5}{\lfloor 5}-\cdots\infty$$

then show that (তেন্তে দেখুওৱা যে) $x^2=y$.

(c) Show that (দেখুওৱা যে)

$$\frac{\pi}{8}=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{9\cdot 11}+\cdots$$

(d) If (যদি) $\tan\log(x+iy)=a+ib$, $a^2+b^2\neq 1$, then prove that (তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে)

$$\tan\log(x^2+y^2)=\frac{2a}{1-a^2-b^2}$$

(e) If $\tan(\alpha+i\beta)=x+iy$, then prove that

যদি $\tan(\alpha+i\beta)=x+iy$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$x^2+y^2+2x\cot 2\alpha=1$$

4. Answer *either (a) or (b)* :

(a) অথবা *(b)*ৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) (i) If a, b, c are positive real numbers, then show that

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$$

Hence show that

$$a^3+b^3+c^3\geq ab+bc+ca$$ 4

যদি a, b, c ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$$

ইয়াৰ পৰা দেখুওৱা যে

$$a^3+b^3+c^3\geq ab+bc+ca$$

(ii) Test the convergence of the following series : 6

তলৰ শ্ৰেণীটোৰ অভিসাৰিতাৰ পৰীক্ষা কৰা :

$$\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{x^3}{5}+\cdots$$

(b) *(i)* If (যদি) $a^2+b^2+c^2=1$ and (আৰু) $x^2+y^2=1$, then show that (তেন্তে দেখুওৱা যে)

$$ax+by+cz\le 1$$ 4

(ii) Define absolutely convergent series with an example. Examine the convergence of the following infinite series :

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots \text{ to } \infty$$

Show that it is conditionally convergent. 2+3+1=6

উদাহৰণসহ পৰম অভিসাৰী শ্ৰেণীৰ সংজ্ঞা দিয়া। তলত দিয়া অসীম শ্ৰেণীটোৰ অভিসাৰিতাৰ পৰীক্ষা কৰা :

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots \text{ to } \infty$$

দেখুওৱা যে ই চৰ্ত সাপেক্ষে অভিসাৰী।

5. *(a)* Solve by Cardan's method : 6

কাৰ্ডনৰ নিয়মেৰে সমাধা কৰা :

$$x^3-6x-9=0$$

(b) If α, β, γ are the roots of

$$x^3+px^2+qx+r=0$$

then find the value of

$$\sum\left(\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}\right)$$ 4

$x^3+px^2+qx+r=0$ সমীকৰণটোৰ মূল α, β, γ হ'লে $\sum\left(\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}\right)$ ৰ মান উলিওৱা।

6. *(a)* Prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$$(1^r+2^r+\cdots+n^r)^n > n^n(n!)^r$$

where (য'ত) $n\in N$ and (আৰু) $r>0$. 4

(b) Show that the series

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots$$

converges for $p>1$ and diverges for $p\le 1$. 6

দেখুওৱা যে

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots$$

শ্ৰেণীটো $p>1$ হ'লে অভিসাৰী আৰু $p\le 1$ হ'লে অপসাৰী।

Or / নাইবা

Test for convergence of the following series : 6

তলৰ শ্ৰেণীটোৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা :

$$\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\cdots \text{ to } \infty \ (x>0)$$

★★★