2019

MATHEMATICS

(General)

(Coordinate Geometry and Vector Analysis)

Full Marks : 80

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

Answer either *in English* or *in Assamese*

1. Answer the following as directed : 1×10=10

তলত দিয়াবোৰৰ নিৰ্দেশানুসাৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) For what value of k, the equation $6x^2 - 5xy + ky^2 = 0$ represents a pair of perpendicular lines?

kৰ কি মানৰ বাবে $6x^2 - 5xy + ky^2 = 0$ সমীকৰণে এযোৰ পৰস্পৰ লম্বভাৱে থকা সৰলৰেখা নিৰ্দেশ কৰিব ?

(b) Write the condition when a line $y = mx + c$ is a tangent to the parabola $y^2 = 4ax$.

কি চৰ্ত সাপেক্ষে $y = mx + c$ সৰলৰেখাডাল $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তৰ এডাল স্পৰ্শক হ'ব ?

(c) What is the latus rectum of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$?

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তৰ নাভিলম্ব কি হয় ?

(d) Define conjugate diameters of an ellipse.

উপবৃত্ত এটাৰ সংযুগ্ম ব্যাসৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(e) If $ab - h^2 < 0$, then

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

represents a ____.

(Fill in the blank)

যদি $ab - h^2 < 0$, তেনেহ'লে

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$ এ

এটা ____ নিৰ্দেশ কৰে।

(খালী ঠাই পূৰণ কৰা)

(f) Write the equation of a plane in intercept form where a, b, c are the intercepts from the axes of reference by the plane.

অক্ষত্ৰয়ৰ পৰা ক্ৰমে a, b, c অংশ কটা সমতলৰ ছেদাংশ আকাৰৰ সমীকৰণটো লিখা।

(g) Write the equation of a line passing through origin and with direction cosines l, m, n.

মূলবিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা আৰু l, m, n দিশাংক হোৱা সৰলৰেখাৰ সমীকৰণটো লিখা।

(h) Write the condition for three vectors $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ to be coplanar.

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ভেক্টৰ তিনিটা এক-সমতলীয় হোৱাৰ চৰ্তটো লিখা।

(i) If $\phi(x, y, z)$ defines a differentiable scalar function, then what $\nabla\phi$ is?

যদি $\phi(x, y, z)$ এটা অদিশ অৱকলনীয় ফলন, তেন্তে $\nabla\phi = ?$

(j) If $V(x, y, z) = V_1 i + V_2 j + V_3 k$, then show that $\nabla \cdot V \neq V \cdot \nabla$.

যদি $V(x, y, z) = V_1 i + V_2 j + V_3 k$, তেন্তে দেখুওৱা যে $\nabla \cdot V \neq V \cdot \nabla$.

2. Answer the following questions : 2×5=10

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Find the joint equation of the straight lines which bisect the angles between the two lines given by $3x^2 + 6xy - y^2 = 0$.

$3x^2 + 6xy - y^2 = 0$ ৰেখাদ্বয়ৰ মধ্যৱৰ্তী কোণৰ সমদ্বিখণ্ডক দুডালৰ যৌথ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

(b) Prove that the product of the perpendiculars from any point on a hyperbola to its asymptotes is constant.

এটা পৰাবৃত্তৰ ওপৰত থকা কোনো বিন্দুৰ পৰা পৰাবৃত্তৰ অনন্তস্পৰ্শী ৰেখা দুডাললৈ টনা লম্বদূৰত্বৰ পূৰণফল এটা ধ্রুবক ৰাশি।

(c) Find the equation of the plane containing the lines

$$\frac{x+3}{2}=\frac{y+5}{3}=\frac{z-7}{-3} \text{ and } \frac{x+1}{4}=\frac{y+1}{5}=\frac{z+1}{-1}$$

$\frac{x+3}{2}=\frac{y+5}{3}=\frac{z-7}{-3}$ আৰু $\frac{x+1}{4}=\frac{y+1}{5}=\frac{z+1}{-1}$

সৰলৰেখাক ধাৰণ কৰা সমতলৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

(d) Find the centre and the radius of the sphere $x^2+y^2+z^2-6x+8y-10z+1=0$.

$x^2+y^2+z^2-6x+8y-10z+1=0$ গোলকৰ কেন্দ্ৰ আৰু ব্যাসাৰ্ধ নিৰ্ণয় কৰা।

(e) If $\phi(x, y, z)=x^2y^2z^2$ and

$$A = xzi - xy^2j + y^2z^2k$$

then find $\frac{\partial}{\partial z}(\phi A)$.

যদি $\phi(x, y, z)=x^2y^2z^2$ আৰু

$$A = xzi - xy^2j + y^2z^2k$$

তেন্তে $\frac{\partial}{\partial z}(\phi A) = ?$

3. Answer any *four* questions of the following : 5×4=20

তলৰ যি কোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Find the condition that the equation

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

represents a pair of intersecting lines and find the point of intersection.

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

সমীকৰণে এযোৰ পৰস্পৰ কটাকটি কৰা সৰলৰেখা নিৰূপণ কৰাৰ চৰ্ত নিৰ্ণয় কৰা আৰু ছেদবিন্দুৰ স্থানাংক নিৰ্ণয় কৰা।

(b) If the lines $y=mx$ and $y=m'x$ are conjugate diameters of the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, then prove that $mm'=-\frac{b^2}{a^2}$.

যদি $y=mx$ আৰু $y=m'x$ ৰেখাদুডাল $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তৰ সংযুগ্ম ব্যাস হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $mm'=-\frac{b^2}{a^2}$.

(c) Find the polar equation of a conic with a focus as the pole and the line joining the focus to the corresponding vertex as the initial line.

নাভিক ধ্ৰুৱবিন্দু আৰু নাভিৰ পৰা শীৰ্ষবিন্দু সংযোগী ৰেখাক আদিৰেখা হিচাবে লৈ পোৱা শাংকৱৰ ধ্ৰুৱীয় সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

(d) A variable plane is at a constant distance p from the origin and meets the axes, which are rectangular, in A, B, C. Through A, B, C planes are drawn parallel to the coordinate planes. Show that the locus of their point of intersection is given by

$$x^{-2}+y^{-2}+z^{-2}=p^{-2}$$

মূলবিন্দুৰ পৰা p দূৰত্বত (অপৰিৱৰ্তনীয়) থকা এখন পৰিৱৰ্তনশীল সমতলে অক্ষত্ৰয়ক ক্ৰমে A, B, C বিন্দুত কাটে। কাৰ্টেচীয় সমতলতিনিখনৰ সমান্তৰালকৈ A, B, C বিন্দুৰ মাজেৰে তিনিখন সমতল টনা হ'ল। দেখুওৱা সমতলতিনিখনৰ ছেদবিন্দুৰ সঞ্চাৰপথ হ'ব

$$x^{-2}+y^{-2}+z^{-2}=p^{-2}$$

(e) Find the equation to the cylinder whose generators are parallel to $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ and guiding curve is $x^2+y^2=16,\ z=0$.

এটা চিলিণ্ডাৰৰ উৎপাদক ৰেখাকেইডাল যদি $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ ৰেখাৰ সমান্তৰাল হয় আৰু ইয়াৰ পৰিচালন বক্ৰ যদি $x^2+y^2=16,\quad z=0$ হয়, তেন্তে চিলিণ্ডাৰটোৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

(f) *(i)* Prove that

প্ৰমাণ কৰা যে

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d}]\,\vec{c}-[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]\,\vec{d}$$ 3

(ii) Prove that

প্ৰমাণ কৰা যে

$$[\vec{a}+\vec{b},\ \vec{b}+\vec{c},\ \vec{c}+\vec{a}]=2[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}]$$ 2

Answer either *(a)* or *(b)* of each of the following questions : 10×4=40

তলৰ প্ৰতিটো প্ৰশ্নৰ পৰা *(a)* অথবা *(b)*ৰ উত্তৰ দিয়া :

4. *(a)* *(i)* Find the angle through which the axes are to be rotated in order to remove the term containing xy from the expression $ax^2+2hxy+by^2$. 5

অক্ষদ্বয়ক কি কোণত ঘূৰালে $ax^2+2hxy+by^2$ ৰাশিটো xy ৰহিত হ'ব?

(ii) Find the equation of the tangent to the circle $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ at the point $P(x',\ y')$ on the circle. 5

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তৰ ওপৰত থকা $P(x',\ y')$ বিন্দুত টনা স্পৰ্শকৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

(b) (i) Prove that the product of the perpendiculars from the point (x', y') on the lines $ax^2+2hxy+by^2=0$ is

$$\frac{ax'^2+2hx'y'+by'^2}{\sqrt{(a-b)^2+4h^2}}$$ 5

প্ৰমাণ কৰা যে (x', y') বিন্দুৰ পৰা $ax^2+2hxy+by^2=0$ সমীকৰণে নিৰ্দেশ কৰা সৰলৰেখা দুডাললৈ টনা লম্বদূৰত্বৰ পূৰণফল

$$\frac{ax'^2+2hx'y'+by'^2}{\sqrt{(a-b)^2+4h^2}}$$

(ii) Show that the equation of the tangent to the parabola $y^2=4ax$ at (x', y') is $yy'=2a(x+x')$. 5

দেখুওৱা যে $y^2=4ax$ অধিবৃত্তৰ ওপৰত থকা (x', y') বিন্দুত টনা স্পৰ্শকৰ সমীকৰণ $yy'=2a(x+x')$.

5. (a) (i) Find the equation of the asymptotes of the hyperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. 5

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পৰাবৃত্তটোৰ অনন্তস্পৰ্শী ৰেখাদ্বয় নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) Reduce the equation

$$5x^2-24xy-5y^2+4x+58y-59=0$$ 5

ওপৰৰ সমীকৰণটোক আদৰ্শগত আকাৰত ৰূপান্তৰিত কৰা।

(b) (i) Find the condition that the line $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ to lie in the plane $ax+by+cz+d=0$. 5

$ax+by+cz+d=0$ সমতলখনে $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ সৰলৰেখাক ধাৰণ কৰাৰ চৰ্ত নিৰূপণ কৰা।

(ii) Find the shortest distance and equation of shortest distance between the lines

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z-7}{1} \text{ and } \frac{x+1}{7}=\frac{y+1}{-6}=\frac{z+1}{1}$$ 5

$\frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z-7}{1}$ আৰু $\frac{x+1}{7}=\frac{y+1}{-6}=\frac{z+1}{1}$

ৰেখাদুডালৰ মাজৰ হ্ৰস্বতম দূৰত্বৰ দৈৰ্ঘ্য আৰু সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

6\. (a) (i) Find the equation of the sphere through the circle $x^2+y^2+z^2=1$, $2x+4y+5z=6$ and touching the plane $z=0$. 5

$x^2+y^2+z^2=1$, $2x+4y+5z=6$ বৃত্তৰ মাজেৰে যোৱা আৰু $z=0$ সমতলক স্পৰ্শ কৰা গোলকৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) Find the equation of the cone with vertex (5, 4, 3) and $3x^2+2y^2=6$, $y+z=0$ as base. 5

(5, 4, 3) শীৰ্ষবিন্দু হোৱা আৰু $3x^2+2y^2=6$, $y+z=0$ আধাৰ হোৱা শংকুৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

(b) (i) Find the equation of the plane passing through the straight line $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{4}$ and perpendicular to the plane $2x+y-3z=-4$. 5

$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{4}$ সৰলৰেখাৰ মাজেৰে যোৱা আৰু $2x+y-3z=-4$ সমতলৰ লম্বভাৱে থকা সমতলৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) A plane passes through a fixed point (a, b, c) and cuts the axes in A, B, C. Show that the locus of the centre of the sphere $OABC$ is

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=2$$ 5

অক্ষত্ৰয়ক A, B, C বিন্দুত কটা সমতলখন এটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দু (a, b, c) ৰ মাজেৰে যায়। দেখুওৱা যে $OABC$ গোলকৰ কেন্দ্ৰৰ সঞ্চাৰপথ হ'ব

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=2$$

7\. (a) (i) If $A=i-2j-3k$, $B=2i+j-k$ and $C=i+3j-2k$, then find $|(A\times B)\times C|$. 5

যদি $A=i-2j-3k$, $B=2i+j-k$ আৰু $C=i+3j-2k$, তেন্তে $|(A\times B)\times C|$ ৰ মান উলিওৱা।

(ii) If $R=e^{-t}i+\ln(t^2+1)j-\tan tk$, then find $\frac{dR}{dt}$, $\left|\frac{dR}{dt}\right|$ and $\frac{d^2R}{dt^2}$. 5

যদি $R=e^{-t}i+\ln(t^2+1)j-\tan tk$, তেন্তে $\frac{dR}{dt}$, $\left|\frac{dR}{dt}\right|$ আৰু $\frac{d^2R}{dt^2}$ নিৰ্ণয় কৰা।

(b) (i) Given that $\phi = 2x^3y^2z^4$. Then find $\nabla \cdot \nabla\phi$ and $\nabla \times (\nabla\phi)$. 5

দিয়া আছে $\phi = 2x^3y^2z^4$. তেন্তে $\nabla \cdot \nabla\phi$ আৰু $\nabla \times (\nabla\phi)$ নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) If $V = \omega \times r$, prove that $\omega = \frac{1}{2}\text{curl } V$, where ω is a constant vector. 5

যদি $V = \omega \times r$, প্ৰমাণ কৰা যে $\omega = \frac{1}{2}\text{curl } V$, য'ত ω এটা ধ্ৰুৱক ভেক্টৰ।

★★★