2019

MATHEMATICS

(General)

Paper : 6.1

(Linear Algebra and Complex Analysis)

Full Marks : 80

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

Answer either *in English* or *in Assamese*

1. Answer the following questions : 1×10=10

নিম্নোক্ত প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Is set {(1, 0), (1, 1)} a basis for $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$?

{(1, 0), (1, 1)} সংহতিটো $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$-ৰ এটা ভূমি হয়নে ?

(b) Write the rank of the unit matrix

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

একক মৌলকক্ষ $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$-ৰ কোটি লিখা।

(c) U is a subspace of the vector space $V(F)$ and $a \in F$. Is $aU = U$?
$V(F)$ সদিশ স্থানৰ U এখন উপস্থান আৰু $a \in F$. তেন্তে $aU = U$ হয়নে?

(d) Mention Cauchy-Riemann equations.
ক'ছি-ৰিমানৰ সমীকৰণসমূহ উল্লেখ কৰা।

(e) Give an example of a finite vector space.
এখন সসীম সদিশ স্থানৰ উদাহৰণ দিয়া।

(f) Define analytic function.
বৈশ্লেষিক ফলনৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(g) Can an elementary transformation change the rank of a matrix?
প্ৰাথমিক ৰূপান্তৰণ এটাই মৌলকক্ষৰ কোটি পৰিবৰ্তন কৰিব পাৰেনে?

(h) Which of the following functions is a linear transformation from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}^2$?
নিম্নোক্ত কোনটো ফলন $\mathbb{R}^2$-ৰ পৰা $\mathbb{R}^2$-লৈ এটা বৈখিক ৰূপান্তৰ?

(i) $\mathscr{T}(x, y) = (x - y, x + y)$

(ii) $\mathscr{T}(x, y) = (x + 1, y - 1)$

(iii) $\mathscr{T}(x, y) = (x^2, y^2)$

(i) Write the normal form of the matrix $\mathscr{A}$, where
$\mathscr{A}$ মৌলকক্ষৰ প্ৰসামান্য ৰূপটো লিখা, য'ত

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(j) Is the set $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ linearly independent subset of vector space $V_3(\mathbb{R})$?
$S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ সংহতিটো $V_3(\mathbb{R})$ সদিশ স্থানৰ এটা বৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ উপসংহতি হয়নে?

2. Answer any *two* of the following questions : 2×2=4

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ যি কোনো দুটাৰ উত্তৰ লিখা :

(a) If two vectors in a vector space are linearly dependent, then show that one vector is a scalar multiple of the other.
যদি এখন সদিশ স্থানৰ দুটা মৌল বৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে সিহঁতৰ এটা আনটোৰ স্কেলাৰ গুণফল।

(b) Prove that $U = \{(0, a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ is a linear subspace of $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$.
প্ৰমাণ কৰা যে $U = \{(0, a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ সংহতিটো $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$-ৰ এটা বৈখিক উপস্থান।

(c) If $T : U(F) \to V(F)$ is a linear mapping, then show that $T(-u) = -T(u)$, $\forall u \in U$.
যদি $T : U(F) \to V(F)$ এটা বৈখিক ফলন হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে $T(-u) = -T(u)$, $\forall u \in U$.

3. Answer any *three* of the following questions : 2×3=6

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ যি কোনো তিনিটাৰ উত্তৰ লিখা :

(a) Show that $u = e^x \cos y$ is a harmonic function.
দেখুওৱা যে, $u = e^x \cos y$ এটা হৰাত্মক ফলন।

(b) If $f(z) = \dfrac{x^3 y(y - ix)}{x^6 + y^2}$, $z \neq 0$, $f(0) = 0$, then prove that

$$\underset{z \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(z) - f(0)}{z} = 0$$

where $z \to 0$ along any radius vector.

যদি $f(z) = \dfrac{x^3 y(y - ix)}{x^6 + y^2}$, $z \neq 0$, $f(0) = 0$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$\underset{z \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(z) - f(0)}{z} = 0$$

য'ত যি কোনো সদিশ ব্যাসাৰ্ধই দি $z \to 0$ হয়।

(c) Prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$$\frac{d}{dz}(\log_e z) = \frac{1}{z}$$

(d) If $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, then prove that

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

যদি $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে,

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

4. Answer any *four* of the following questions : 5×4=20

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ যি কোনো চাৰিটাৰ উত্তৰ লিখা :

(a) Prove that a non-empty subset W of a vector space $V(F)$ is a subspace, if

$$a, b \in F,\ u, v \in W \Rightarrow au + bv \in W$$

(Continued)

প্ৰমাণ কৰা যে $V(F)$ সদিশ স্থানৰ এটা অশূন্য উপসংহতি W এখন উপস্থান হ'ব, যদি

$$a, b \in F,\ u, v \in W \Rightarrow au + bv \in W$$

(b) Show that the vectors (1, 1, 0, 0), (0, 1, −1, 0) and (0, 0, 0, 3) in $\mathbb{R}^4$ are linearly independent.

দেখুওৱা যে $\mathbb{R}^4$-ৰ (1, 1, 0, 0), (0, 1, −1, 0) আৰু (0, 0, 0, 3) ভেক্টৰকেইটা ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ।

(c) Prove that any superset of a linearly dependent set is linearly dependent.

প্ৰমাণ কৰা যে ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ সংহতিৰ যি কোনো অধিসংহতি ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ।

(d) If S and T are subsets of a vector space $V(F)$, then show that

$$L(S \cup T) = L(S) + L(T)$$

যদি S আৰু T সংহতি দুটা এখন সদিশ স্থান $V(F)$-ৰ উপসংহতি হয়, তেন্তে

$$L(S \cup T) = L(S) + L(T)$$

(e) Prove that $W_1 \cap W_2$ is a subspace of $V(F)$, if W_1 and W_2 are subspaces of $V(F)$.

যদি W_1 আৰু W_2 সংহতি দুটা $V(F)$ সদিশ স্থানৰ উপস্থান হয়, তেন্তে $W_1 \cap W_2$ ও $V(F)$-ৰ এটা উপস্থান হ'ব বুলি প্ৰমাণ কৰা।

(Turn Over)

(f) Show that the function $f : V_3(F) \to V_2(F)$ defined by $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3)$ is a linear transformation.

প্ৰমাণ কৰা যে $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3)$-ৰ দ্বাৰা সংজ্ঞাবদ্ধ $f : V_3(F) \to V_2(F)$ ফলনটো এটা ৰৈখিক ৰূপান্তৰণ।

5. Answer any *two* of the following questions : 5×2=10

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ যি কোনো দুটাৰ উত্তৰ লিখা :

(a) Prove that $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ is continuous at $z_0 = x_0 + iy_0$, iff $u(x, y)$ and $v(x, y)$ are continuous at (x_0, y_0).

প্ৰমাণ কৰা যে $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ফলনটো $z_0 = x_0 + iy_0$ বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন, যদি আৰু যদিহে $u(x, y)$ আৰু $v(x, y)$ ফলন দুটা (x_0, y_0) বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন।

(b) Using Cauchy's integral formula, evaluate $\oint_C \frac{z^3}{z-2i} dz$, where C is the circle $|z-2| = 5$.

C-য়ে $|z-2| = 5$ বৃত্তটোক বুজালে ক'ছিৰ সমাকলন সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি $\oint_C \frac{z^3}{z-2i} dz$-ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(c) State and prove Cauchy's integral formula.

ক'ছিৰ সমাকলন সূত্ৰটো উল্লেখ কৰা আৰু প্ৰমাণ কৰা।

6. Verify Cayley-Hamilton theorem for the following matrix A and hence find A^{-1} : 10

নিম্নোক্ত মৌলকক্ষ A-ৰ বাবে কেলি-হেমিল্টন উপপাদ্যটো প্ৰতিপন্ন কৰা আৰু তাৰপৰ A^{-1} নিৰ্ণয় কৰা :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Or / অথবা

Find all eigenvalues and eigenvectors of the matrix A, where

A মৌলকক্ষৰ সকলোবোৰ আইগেন মান আৰু আইগেন ভেক্টৰ উলিওৱা, য'ত

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

7. State various elementary transformations of a matrix. Reduce the following matrix A to normal form and hence find its rank : 3+6+1=10

মৌলকক্ষৰ বিভিন্ন প্ৰাথমিক ৰূপান্তৰসমূহ লিখা। তলৰ A মৌলকক্ষটো প্ৰসামান্য আকাৰলৈ ৰূপান্তৰ কৰা আৰু তাৰ পৰা ইয়াৰ কোটি নিৰ্ণয় কৰা :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Or / অথবা

What is meant by echelon form of a matrix? Reduce the following matrix to echelon form and hence find its rank : 10

মৌলকক্ষৰ ইকেলন আকাৰ বুলিলে কি বুজায়? তলৰ মৌলকক্ষটো ইকেলন আকাৰত প্ৰকাশ কৰা আৰু তাৰ পৰা কোটি নিৰ্ণয় কৰা :

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

8. Prove that $\oint_C \frac{z^2 - z + 1}{z - 1} dz = 2\pi i$, where C is the circle $|z| = 1$. 10

প্ৰমাণ কৰা যে $\oint_C \frac{z^2 - z + 1}{z - 1} dz = 2\pi i$, য'ত C হৈছে $|z| = 1$ বৃত্ত।

Or / অথবা

Find the analytic function whose real part is

$$u = e^{-x}[(x^2 - y^2)\cos y + 2xy\sin y]$$

Also show that u is harmonic.

$$u = e^{-x}[(x^2 - y^2)\cos y + 2xy\sin y]$$

বাস্তৱ অংশবিশিষ্ট বৈশ্লেষিক ফলনটো নিৰ্ণয় কৰা। লগতে দেখুওৱা যে u এটা হৰাত্মক ফলন।

★★★