2019

MATHEMATICS

(General)

Paper : 6.2

(Advanced Calculus)

Full Marks : 80

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

Answer either *in English* or *in Assamese*

1. Answer the following as directed : 1×10=10

তলত দিয়াবোৰৰ নিৰ্দেশানুযায়ী উত্তৰ দিয়া :

(a) If $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in N\right\}$, find the set of limit points of A (w.r. to usual metric).

যদি $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in N\right\}$, A-ৰ সীমাবিন্দুৰ সংহতিটো নিৰ্ণয় কৰা (সাধাৰণ দূৰিক সাপেক্ষে)।

(b) Write the value of $\Gamma(n)$, where n is a natural number.

$\Gamma(n)$-ৰ মান লিখা য'ত n এটা স্বাভাৱিক সংখ্যা।

(c) State Bolzano-Weierstrass theorem.
Bolzano-Weierstrass-ৰ উপপাদ্যটো লিখা।

(d) Is the set of real numbers w.r. to usual metric complete?
সাধাৰণ দূৰিক সাপেক্ষে, বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতিটো এটা পূৰ্ণ দূৰিক স্থান হয়নে?

(e) Every continuous function is Riemann integrable.
(Write True or False)
প্ৰতিটো অবিচ্ছিন্ন ফলন Riemann অনুকলনীয়।
(সঁচা নে মিছা লিখা)

(f) Express beta function $B(l, m)$ mathematically.
বিটা ফলন $B(l, m)$-ক গাণিতিকভাৱে প্ৰকাশ কৰা।

(g) Give an example of an improper integral of first kind.
এটা প্ৰথম প্ৰকাৰৰ অপ্ৰকৃত অনুকলনৰ উদাহৰণ দিয়া।

(h) Define open set.
মুক্ত সংহতিৰ সংজ্ঞা লিখা।

(i) Write definition of Cauchy sequence.
কচি অণুক্ৰমৰ সংজ্ঞা লিখা।

(j) When an integral is said to be improper?
এটা অনুকলনক কেতিয়া অপ্ৰকৃত বুলি কোৱা হ'ব?

2. Answer the following questions : 2×5=10
তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ লিখা :

(a) Let $d : R \times R \to R$ be defined by $d(x, y) = |x - y|$. Show that d is a metric on R, $x, y \in R$.

ধৰা হল $d : R \times R \to R$ ফলনটোৰ সংজ্ঞা এনেধৰণে দিয়া আছে $d(x, y) = |x - y|$, $x, y \in R$. দেখুওৱা যে d, R-ত এটা দূৰিক।

(b) Evaluate upper Riemann sum for the function $f(x) = C$, where C is a constant.
$f(x) = C$ ফলনটোৰ উৰ্ধ ৰাইমান যোগফল উলিওৱা য'ত C এটা ধ্ৰুৱক।

(c) Evaluate (মান নিৰ্ণয় কৰা) :

$$\int_0^1 \int_0^1 (x + y)\, dx dy$$

(d) Show that (দেখুওৱা যে)

$$\Gamma(n) = (n-1) \int_0^\infty e^{-x} x^{n-2}\, dx$$

(e) Show that X is an open set, where (X, d) is a metric space.

দেখুওৱা যে (X, d) দূৰিক স্থানত X এটা মুক্ত সংহতি।

3. Solve any *four* of the following : 5×4=20

তলত দিয়াবোৰৰ যি কোনো চাৰিটাৰ সমাধান কৰা :

(a) Give an example of an incomplete metric spae with justification.

যুক্তি সহকাৰে এটা অপূৰ্ণ দূৰিক স্থানৰ উদাহৰণ দিয়া।

(b) In a metric space, show that every open sphere is an open set.

এটা দূৰিক স্থানত, দেখুওৱা যে, প্ৰত্যেক মুক্ত গোলক এটা মুক্ত সংহতি।

(c) Examine the convergence of the following integral :

তলৰ অনুকলনটোৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}(1-x)^{1/3}}$$

(d) Show that (দেখুওৱা যে)

$$\int_{\underline{a}}^{b} f\,dx \le \int_a^{\bar{b}} f\,dx$$

(e) Evaluate $\iiint e^{x+y+z}dx\,dy\,dz$ over the positive octant such that $x+y+z\le 1$.

ধনাত্মক চোকত $\iiint e^{x+y+z}dx\,dy\,dz$-ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা য'তে $x+y+z\le 1$.

4. Solve any *two* of the following : 10×2=20

তলত দিয়াবোৰৰ যি কোনো দুটা সমাধান কৰা :

(a) (i) Show that in a metric space, every convergent sequence is a Cauchy sequence.

দেখুওৱা যে, এটা দূৰিক স্থানত প্ৰতিটো অভিসাৰী অণুক্ৰম একোটা কচি অণুক্ৰম।

(ii) If $f(x)=x^2\ \forall x\in[0,a]$, find $L(p, f)$.

যদি $f(x)=x^2\ \forall x\in[0,a]$, $L(p, f)$ নিৰ্ণয় কৰা।

(b) Test convergence for the following integrals :

তলত অনুকলনবোৰৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা :

(i) $\int_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{1+x^2}$

(ii) $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$

(c) (i) If $f\in R[a, b]$, show that $f^2\in R[a, b]$.

যদি $f\in R[a, b]$, দেখুওৱা যে $f^2\in R[a, b]$.

(ii) Evaluate (মান নিৰ্ণয় কৰা) :

$$\int_0^1\left[\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}dy\right]dx$$

5. Solve any *two* of the following : 10×2=20

তলত দিয়াবোৰৰ যি কোনো দুটা সমাধান কৰা :

(a) *(i)* Prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$$B(m, n) = B(m+1, n) + B(m, n+1),\ m > 0,\ n > 0$$

(ii) Show that (দেখুওৱা যে)

$$B(l, m) = \int_0^\infty \frac{x^{l-1}}{(1+x)^{l+m}}\,dx$$

(b) *(i)* Show that (দেখুওৱা যে)

$$\int_0^{\pi/2} \log \sin x\, dx$$

converges (অভিসাৰী).

(ii) Let f be a continuous function defined on $[a, b]$ and $f \in R[a, b]$. Prove that for some $c \in [a, b]$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(c)$$

ধৰা হল $[a, b]$ অন্তৰালত f এটা অবিচ্ছিন্ন ফলন আৰু $f \in R[a, b]$. কোনো এটা বিন্দু $c \in [a, b]$-ৰ বাবে দেখুওৱা যে

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(c)$$

(c) *(i)* Evaluate (মান নিৰ্ণয় কৰা)

$$\iiint_R (x+y+z+1)^2\, dx\,dy\,dz$$

where R is the region bounded by $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x+y+z \le 1$.

য'ত R, ক্ষেত্ৰ $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x+y+z \le 1$-ৰ দ্বাৰা সীমিত।

(ii) Prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$$\iiint_R (x+y+z)\, dx\,dy\,dz = \frac{9}{2}$$

where (য'ত)

$$R : 0 \le x \le 1;\ 1 \le y \le 2;\ 2 \le z \le 3$$

★★★