2018

MATHEMATICS

(General)

(Abstract Algebra and Matrices)

Full Marks : 60

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

Answer either *in English* or *in Assamese*

PART—I

(*Marks* : 7)

1. Answer the following questions : 1×7=7

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Find the order of i and $-i$ in the multiplicative group $G = \{1, -1, i, -i\}$, where $i = \sqrt{-1}$.

গুণাধীনৰ সংঘ $G = \{1, -1, i, -i\}$ত i আৰু $-i$ৰ মৌলাংক নিৰ্ণয় কৰা, য'ত $i = \sqrt{-1}$.

(b) What is the order of the permutation group A_n the alternating group?

বিন্যাস সংঘ A_n (alternating group)ৰ মাত্ৰা কিমান?

(c) Cyclic groups are abelian. Is it true?

চক্ৰীয় সংঘবোৰ এবেলীয়। ই সত্যনে?

(d) Give an example of a commutative ring without unity.

এটা একক মৌলবিহীন ক্ৰমবিনিময় বলয়ৰ উদাহৰণ দিয়া।

(e) Define a homomorphism from a group to another group.

এটা সংঘৰ পৰা আন এটা সংঘলৈ অনুৰূপতাৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(f) Can the following two matrices be added? Justify your answer.

তলৰ মৌলকক্ষ দুটা যোগ কৰিব পাৰিনে? তোমাৰ উত্তৰৰ যুক্তিযুক্ততা দিয়া।

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 7 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

(g) If A is a symmetric matrix, then show that kA is also symmetric, where k is a scalar.

যদি A এটা সমমিত মৌলকক্ষ হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে kAও সমমিত, য'ত k এটা অদিশ ৰাশি।

(Continued)

PART—II

(*Marks* : 8)

2. Answer the following questions : 2×4=8

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Give an example to show that the union of two subgroups is not a subgroup.

এটা উদাহৰণৰ সহায়ত দেখুওৱা যে দুটা উপসংঘৰ মিলন আন এটা উপসংঘ নহয়।

(b) Define cyclic group and give an example of it.

চক্ৰীয় সংঘৰ সংজ্ঞা দিয়া আৰু ইয়াৰ এটা উদাহৰণ দিয়া।

(c) Find the order of the following permutation :

তলৰ বিন্যাসটোৰ মাত্ৰা উলিওৱা :

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

(d) If $f : G \to G'$ is a homomorphism, then show that $f(e) = e'$, where e and e' are the identities of G and G' respectively.

যদি $f : G \to G'$ এটা অনুৰূপতা হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে $f(e) = e'$, য'ত e আৰু e' ক্ৰমে G আৰু G'ৰ একক মৌল।

(Turn Over)

PART—III

(*Marks* : 15)

3. Answer any *three* of the following questions : 5×3=15

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ যি কোনো তিনিটাৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Define group. Prove that in a group G

(i) $(a^{-1})^{-1} = a, \forall a \in G$, where a^{-1} stands for inverse of a;

(ii) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}, \forall a, b \in G$.

সংঘৰ সংজ্ঞা দিয়া। এটা সংঘ Gত প্ৰমাণ কৰা যে

(i) $(a^{-1})^{-1} = a, \forall a \in G$, য'ত a^{-1} হ'ল aৰ প্ৰতিলোম;

(ii) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}, \forall a, b \in G$.

(b) Define centre of a group. Prove that centre of a group G is a subgroup of G. 1+4=5

এটা সংঘৰ কেন্দ্ৰৰ সংজ্ঞা দিয়া। এটা সংঘ Gৰ কেন্দ্ৰ উপসংঘ বুলি প্ৰমাণ কৰা।

(c) Define the following :

তলত দিয়াবোৰৰ সংজ্ঞা দিয়া :

(i) A commutative ring
এটা ক্ৰমবিনিমেয় বলয়

(ii) A ring with unity
এটা একক-যুক্ত বলয়

(iii) A ring with zero divisors
এটা শূন্য-ভাজক বলয়

(iv) An integral domain
এটা পূৰ্ণাংকীয় বাষ্ট্ৰ

(v) A field
এটা ক্ষেত্ৰ

(d) Define orthogonal matrix. Prove that—

(i) an orthogonal matrix is non-singular;

(ii) the inverse of an orthogonal matrix is orthogonal.

লাম্বিক মৌলকক্ষৰ সংজ্ঞা দিয়া। প্ৰমাণ কৰা যে—

(i) এটা লাম্বিক মৌলকক্ষ অক্ষীয়মান;

(ii) এটা লাম্বিক মৌলকক্ষৰ প্ৰতিলোম এটা লাম্বিক মৌলকক্ষ।

(e) Find the inverse of the following matrix :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

তলৰ মৌলকক্ষটোৰ বিপৰীত মৌলকক্ষ নিৰ্ণয় কৰা :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

PART—IV

(*Marks* : 30)

Answer *either (a)* and *(b) or (c)* and *(d)* from each of the following questions : 10×3=30

তলত দিয়া প্ৰশ্নসমূহৰ পৰা *(a)* আৰু *(b) অথবা (c)* আৰু *(d)*ৰ উত্তৰ দিয়া :

4. *(a)* Show that a non-empty subset H of a group G is a subgroup of G, if and only if $ab^{-1} \in H, \ \forall \ a, b \in H$. 5

দেখুওৱা যে G সংঘৰ অৰিক্ত উপসংহতি H, Gৰ এটা উপসংঘ হ'ব, যদি আৰু যদিহে $ab^{-1} \in H, \ \forall \ a, b \in H$.

(b) Prove that a subgroup H of a group G is a normal subgroup of G, if and only if $xHx^{-1} = H, \ \forall \ x \in G$. 5

প্ৰমাণ কৰা যে এটা সংঘ Gৰ উপসংঘ H নিশ্বৰ উপসংঘ হ'ব, যদি আৰু যদিহে $xHx^{-1} = H, \ \forall \ x \in G$.

(c) If H is a subgroup of the group G, then aH and bH are two cosets, then either $aH = bH$ or $aH \cap bH = \phi$. 5

যদি H, G সংঘৰ এটা উপসংঘ, তেন্তে aH আৰু bH সহসংহতি দুটা হয় সমান, নহয় সিহঁতৰ অসংযুক্ত অৰ্থাৎ $aH = bH$ বা $aH \cap bH = \phi$.

(d) Define Kernel of a homomorphism $\phi : G \to G'$, where G and G' are two groups. Prove that Kernel of ϕ is a normal subgroup of G. 1+4=5

G আৰু G' দুটা সংঘ হ'লে $\phi : G \to G'$ অনুৰূপতাৰ মূল্যাংশৰ সংজ্ঞা দিয়া। প্ৰমাণ কৰা যে ϕৰ মূল্যাংশ G সংঘৰ নিশ্বৰ উপসংঘ।

5. *(a)* Prove that a ring R is commutative, if and only if $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \ \forall \ a, b \in R$. 4

প্ৰমাণ কৰা যে R এটা ক্ৰমবিনিময় বলয় হ'ব, যদি আৰু যদিহে $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \ \forall a, b \in R$.

(b) In any ring R, prove that

যি কোনো এটা বলয় Rত, প্ৰমাণ কৰা যে

(i) $a0 = 0 = 0a, \ \forall \ a \in R$

(ii) $a(-b) = (-a)b = -ab, \ \forall \ a, b \in R$

(iii) $(b-c) \cdot a = b \cdot a - c \cdot a, \ \forall \ a, b, c \in R$

2+2+2=6

(c) Prove that every field is an integral domain. Is the converse true? Justify your answer. 3+1+1=5

প্ৰমাণ কৰা যে প্ৰতিটো ক্ষেত্ৰই এটা পূৰ্ণাংকীয় ৰাষ্ট্ৰ। ইয়াৰ বিপৰীতটো সত্যনে? তোমাৰ উত্তৰৰ যুক্তিযুক্ততা প্ৰতিপন্ন কৰা।

(d) Prove that a ring R is without zero divisors, if and only if cancellation laws hold in it. 5

এটা বলয় R অশূন্য ভাজক হ'ব, যদি আৰু যদিহে বলয় Rত cancellation law সিদ্ধ হয়।

6. (a) For the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

verify that $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A| I_3$. 6

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ মৌলকক্ষটোৰ বাবে সত্যাপন কৰা। যে $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A| I_3$.

(b) If A is non-singular matrix, then show that $\text{adj} \cdot \text{adj } A = |A|^{n-2} \cdot A$. 4

যদি A এটা অক্ষীয়মান মৌলকক্ষ হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে $\text{adj} \cdot \text{adj } A = |A|^{n-2} \cdot A$.

(c) Define the rank of a matrix. Find the rank of the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

2+3=5

এটা মৌলকক্ষৰ কোটিৰ সংজ্ঞা দিয়া। মৌলকক্ষ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ৰ কোটি নিৰ্ণয় কৰা।

(d) Solve by matrix method : 5

মৌলকক্ষ পদ্ধতিৰ সহায়ত সমাধান কৰা :

$$x + y + z = 4$$
$$2x - y + 3z = 1$$
$$3x + 2y - z = 1$$

* * *